

পরিসংখ্যান ক্লাশে সবাইকে স্বাগতম



শ্রেণিঃ একাদশ

বিষয়ঃ পরিসংখ্যান ১ম পত্র

অধ্যায়ঃ ৬ষ্ঠ (সংশ্লেষ ও নির্ভরণ)

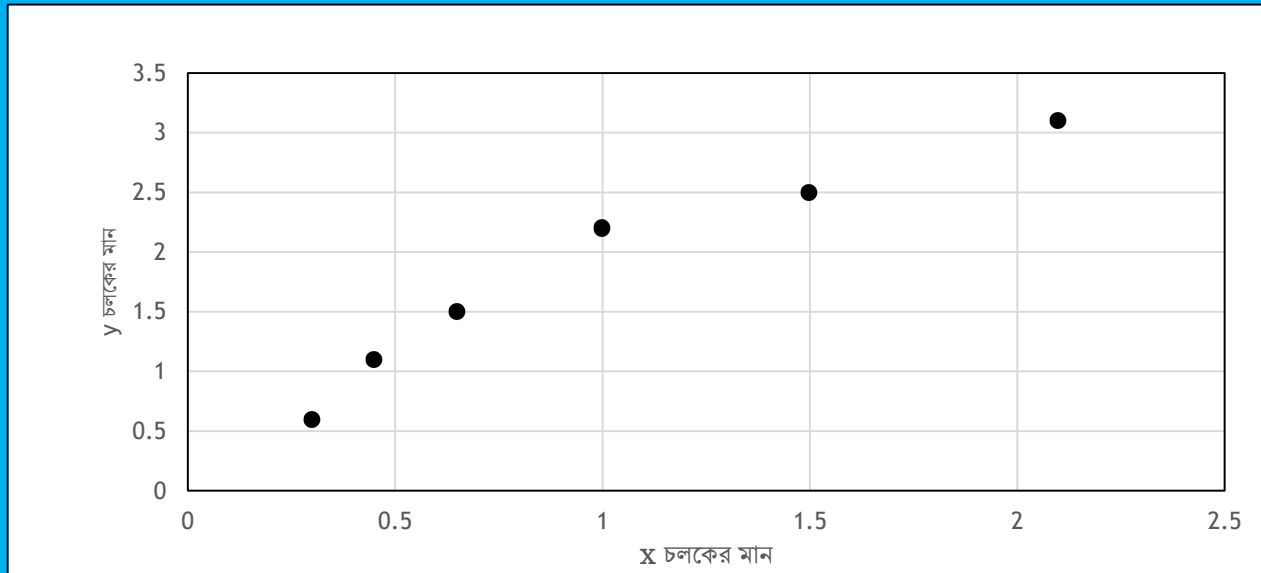
আজকের শিখনফলঃ

- প্রদত্ত তথ্যের বিক্ষিপ্ত চিত্র অঙ্কন এবং সংশ্লেষের ধরণ ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- সংশ্লেষাত্মক ধর্ম প্রমাণ ও ব্যবহার করতে পারবে;
- নির্ভরণ ও নির্ভরাত্মক কী? তা ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- দ্বিচলকের ক্ষেত্রে নির্ভরণ রেখা সূত্রের সাহায্যে নিরূপন এবং পূর্বাভাস প্রদান করতে পারবে;

প্রশ্নঃ- বিক্ষেপ চিত্র কি? বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার সংশ্লেষের প্রকৃতির বর্ণনা দাও।

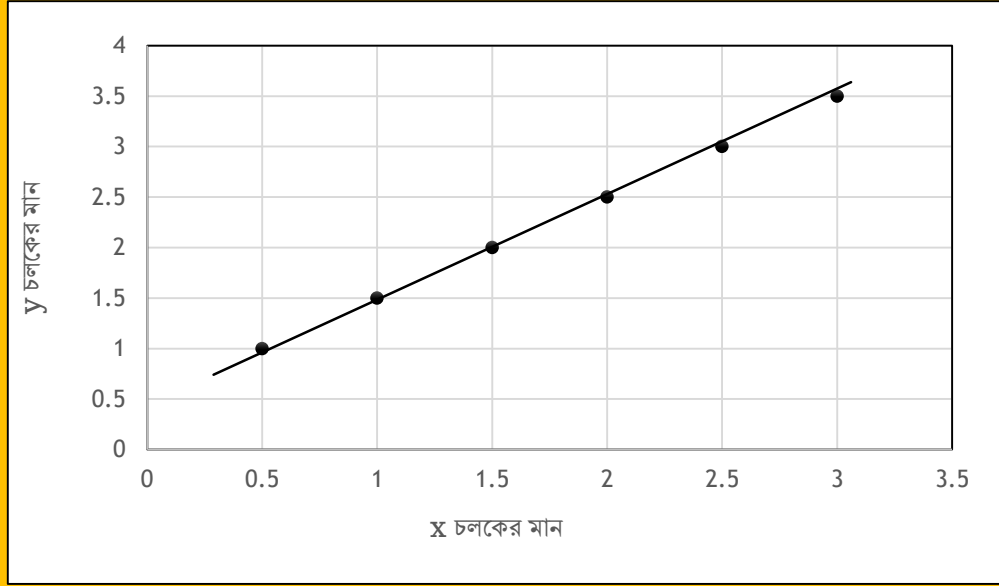
উত্তরঃ-বিক্ষেপ চিত্রঃ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের কয়েক জোড়া মানকে ছক কাগজে আনুভূমিক ও উল্লম্ব অক্ষে উপস্থাপন করলে কতকগুলো বিন্দুর যে সমাবেশ পাওয়া যায়, তাকে বিক্ষেপ চিত্র বলে।

মনে করি, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর n সংখ্যক জোড়া মান। একটি ছক কাগজের আনুভূমিক অক্ষে x চলকের মান ও উল্লম্ব অক্ষে y চলকের মান স্থাপন করলে যে বিন্দুগুলো পাওয়া যায় তাদের দ্বারা গঠিত চিত্রই হলো বিক্ষেপ চিত্র।

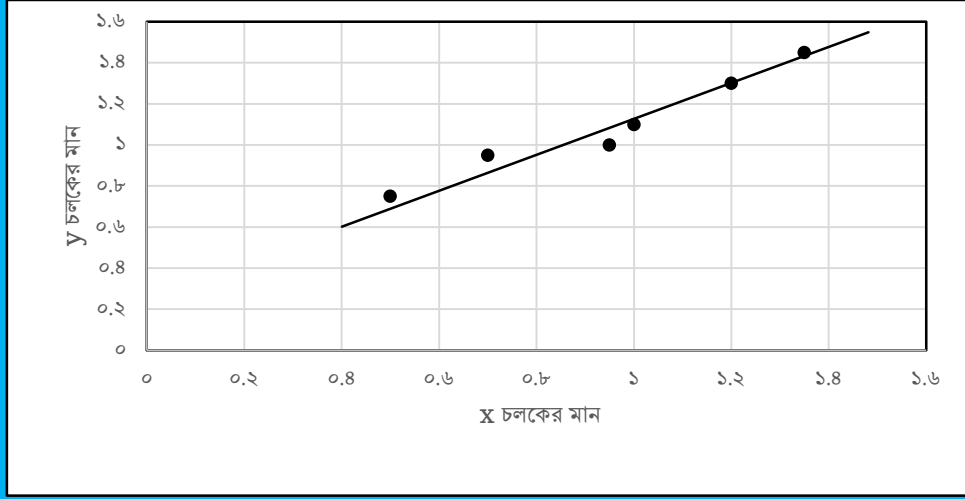


নিম্নে বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে দুটি চলকের মধ্যকার বিভিন্ন প্রকার সংশ্লেষের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করা হলোঃ

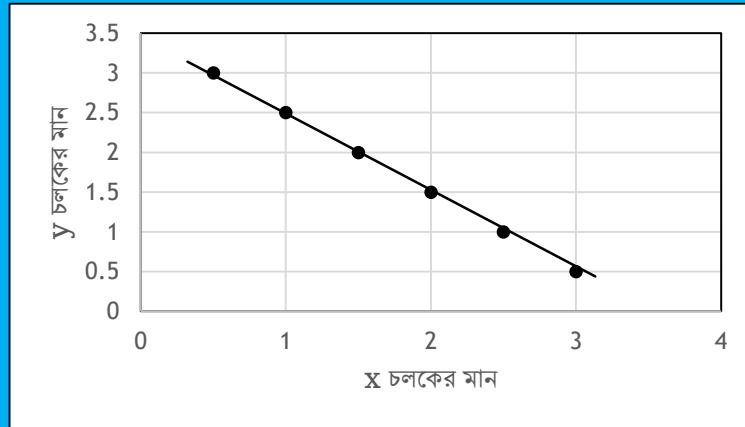
(ক) পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষঃ- চলক দুটির মানগুলি ছক কাগজে বসিয়ে প্রাপ্ত বিন্দুগুলির মধ্যদিয়ে একটি সরলরেখা আঁকলে যদি সবগুলো বিন্দু ঐ সরলরেখার উপর অবস্থান করে এবং রেখাটি ডানদিকে উর্ধ্বগামী হয় তবে রেখাটি পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ নির্দেশ করে। নিচের চিত্রে পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ দেখানো হলোঃ



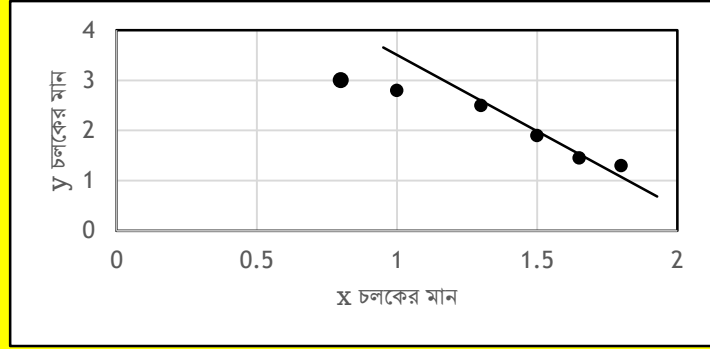
(খ) আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষঃ- চলক দুটির মানগুলি ছক কাগজে বসিয়ে প্রাপ্ত বিন্দুগুলির মধ্যদিয়ে একটি সরলরেখা আঁকলে যদি সবগুলো বিন্দু ঐ সরলরেখার উপর অবস্থান না করে এবং রেখাটি ডানদিকে উর্ধ্বগামী হয় তবে রেখাটি আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ নির্দেশ করে। নিচের চিত্রে আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ দেখানো হলোঃ



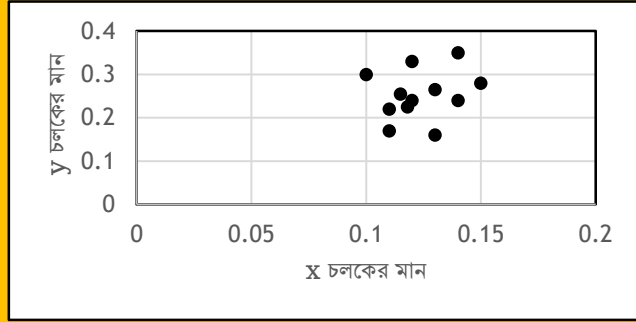
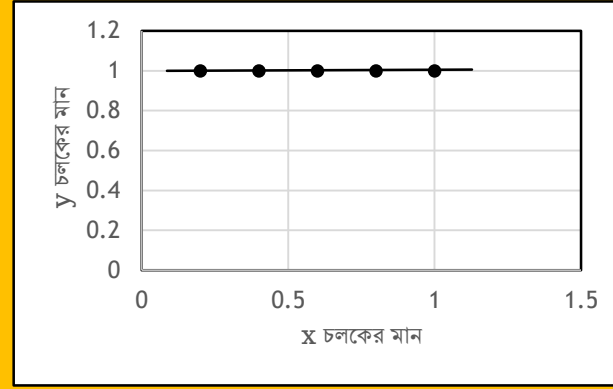
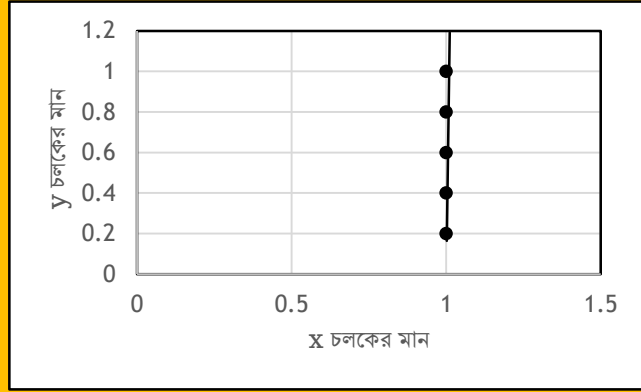
(গ) পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষঃ- চলক দুটির মানগুলি ছক কাগজে বসিয়ে প্রাপ্ত বিন্দুগুলির মধ্যদিয়ে একটি সরলরেখা আঁকলে যদি সবগুলো বিন্দু ঐ সরলরেখার উপর অবস্থান করে এবং রেখাটি বামদিকে নিম্নগামী হয় তবে রেখাটি পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষ নির্দেশ করে। নিচের চিত্রে পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষ দেখানো হলোঃ



(ঘ) আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষণঃ- চলক দুটির মানগুলি ছক কাগজে বসিয়ে প্রাপ্ত বিন্দুগুলির মধ্যদিয়ে একটি সরলরেখা আঁকলে যদি সবগুলো বিন্দু ঐ সরলরেখার উপর অবস্থান না করে এবং রেখাটি বামদিকে নিম্নগামী হয় তবে রেখাটি আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষণ নির্দেশ করে। নিচের চিত্রে আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষণ দেখানো হলোঃ



(ঙ) শূন্য সংশ্লেষণঃ- পাশের চিত্রেসমূহ দেখলে দেখা যায় যে, চলক দুটির মানগুলি ছক কাগজে বসালে প্রাপ্ত বিন্দুসমূহের মধ্য দিয়ে একটি সরলরেখা আঁকলে যদি সবগুলো বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান করে এবং রেখাটি কোনো অক্ষের সমান্তরাল হয় কিংবা বিন্দুগুলি কোনো সরলরেখায় অবস্থান না করে সম্পূর্ণ বিক্ষিপ্তভাবে অবস্থান করলে বিক্ষিপ্ত চিত্র চলকদ্বয়ের মধ্যে শূন্য সংশ্লেষণ নির্দেশ করে। নিম্নের চিত্রগুলো শূন্য সংশ্লেষণ নির্দেশ করে:



প্রশ্নঃ- সহজ ক্রম সংশ্লেষের (**simple rank correlation**) সংজ্ঞা দাও।

উত্তরঃ- সংজ্ঞাঃ- সমান সংখ্যক মানবিশিষ্ট দুটি গুণবাচক চলকের মানগুলোকে তাদের গুণ বা গুরুত্বের ক্রমানুযায়ী সাজিয়ে ক্রমগুলোর মধ্যকার যে সংশ্লেষ নির্ণয় করা হয় তাকে সহজ ক্রম সংশ্লেষ বলে। আর সহজ ক্রম সংশ্লেষের সংখ্যাগত পরিমাপই হলো সহজ ক্রম সংশ্লেষাঙ্ক (**Coefficient of simple rank correlation**)।

সহজ ক্রম সংশ্লেষাঙ্কের সূত্রঃ- স্পিয়ারম্যানের ক্রম সংশ্লেষাঙ্ক, $\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2-1)}$

প্রশ্নঃ- নির্ভরণ, নির্ভরণ রেখা ও নির্ভরণ সমীকরণ বলতে কি বুঝ?

উত্তরঃ- নির্ভরণঃ যদি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে একটি চলক স্বাধীন ও অন্যটি অধীন হয় তবে যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতির সাহায্যে একটি স্বাধীন চলকের জানা মানের জন্য একটি নির্ভরশীল বা অধীন চলকের গড়মান নির্ণয় করা যায় তাকে সরল নির্ভরণ বা সংক্ষেপে নির্ভরণ বলা হয়।

উদাহরণঃ- নির্দিষ্ট পরিমাণ সার প্রয়োগের ফলে ধানের ফলনের গড় পরিবর্তন পরিমাপ করতে সরল নির্ভরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়।

নির্ভরণ রেখাঃ- যে রেখার মাধ্যমে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুইটি চলকের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কের গড় নির্ভরশীলতা ও নির্ভরশীলতার প্রকৃতি নির্ণয় করা হয়, তাকে নির্ভরণ রেখা বলে। পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর মধ্যে x চলকটি স্বাধীন এবং y চলকটি অধীন হলে, x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ হবে, $y = \alpha_1 + \beta_1 x + e_1$; এখানে, $\alpha_1 =$ একটি ধ্রুবক, যা স্বাধীন চলকের প্রভাবমুক্ত।

$$\beta_1 = x \text{ এর উপর } y \text{ এর নির্ভরাজক} = b_{yx}$$

$e_1 =$ ত্রুটি রাশি, যা তথ্যসারিতে বিভিন্ন কারণে ঘটে থাকে।

অনুরূপভাবে, y চলকটি স্বাধীন এবং x চলকটি অধীন হলে, y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ হবে, $x = \alpha_2 + \beta_2 y + e_2$; এখানে, $\alpha_2 =$ একটি ধ্রুবক, যা স্বাধীন চলকের প্রভাবমুক্ত।

$$\beta_2 = y \text{ এর উপর } x \text{ এর নির্ভরাজক} = b_{xy}$$

$e_2 =$ ত্রুটি রাশি, যা তথ্যসারিতে বিভিন্ন কারণে ঘটে থাকে।

নির্ভরণ সমীকরণঃ- একটি স্বাধীন চলকের উপর একটি অধীন চলকের নির্ভরশীলতার সম্পর্ককে যে গাণিতিক সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তাকে নির্ভরণ সমীকরণ বলে।

পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর মধ্যে x চলকটি স্বাধীন এবং y চলকটি অধীন হলে, x এর উপর y এর নির্ভরণ সমীকরণ হবে, $y = \alpha_1 + \beta_1 x + e_i$; এখানে, $\alpha_1 =$ একটি ধ্রুবক, যা স্বাধীন চলকের প্রভাবমুক্ত।

$$\beta_1 = x \text{ এর উপর } y \text{ এর নির্ভরাজক} = b_{yx}$$

$e_i =$ ত্রুটি রাশি, যা তথ্যসারিতে বিভিন্ন কারণে ঘটে থাকে।

অনুরূপভাবে, y চলকটি স্বাধীন এবং x চলকটি অধীন হলে, y এর উপর x এর নির্ভরণ সমীকরণ হবে,

$x = \alpha_2 + \beta_2 y + e_i$; এখানে, $\alpha_2 =$ একটি ধ্রুবক, যা স্বাধীন চলকের প্রভাবমুক্ত।

$$\beta_2 = y \text{ এর উপর } x \text{ এর নির্ভরাজক} = b_{xy}$$

$e_i =$ ত্রুটি রাশি, যা তথ্যসারিতে বিভিন্ন কারণে ঘটে থাকে।

প্রশ্নঃ- নির্ভরাজক বা নির্ভরণ সহগ (Co-efficient of Regression) কি? নির্ভরাজকের ধর্মগুলি লিখ।

উত্তরঃ- পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে স্বাধীন চলকের এক একক মানের পরিবর্তনে অধীন চলকের মানের যে গড় পরিবর্তন হয়, তার সংখ্যাঅক পরিমাপকে নির্ভরাজক বা নির্ভরণ সহগ বলে।

পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর মধ্যে x চলকটি স্বাধীন এবং y চলকটি অধীন হলে, x এর উপর y এর নির্ভরণ সমীকরণ হবে,

$$y = \alpha_1 + \beta_1 x + e_i$$

$$\text{এক্ষেত্রে, } x \text{ এর উপর } y \text{ এর নির্ভরাজক, } \widehat{\beta}_1 = b_{yx} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\left\{ \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right\}} ;$$

বা, $b_{yx} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ [প্রশ্নে গড়, পরিমিত ব্যবধান/ভেদাংক, r এর মান দেওয়া থাকলে]

আবার, যদি y চলকটি স্বাধীন এবং x চলকটি অধীন হয়, তবে y এর উপর x এর নির্ভরণ সমীকরণ হবে,

$$x = \alpha_2 + \beta_2 y + e_i$$

এক্ষেত্রে, y এর উপর x এর নির্ভরাজক, $\beta_2 = b_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})^2} = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\}}$;

বা, $b_{xy} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ [প্রশ্নে গড়, পরিমিত ব্যবধান/ভেদাংক, r এর মান দেওয়া থাকলে]

নির্ভরাজকের ধর্মসমূহ বা বৈশিষ্ট্যসমূহ (Properties of Regression Co-efficient):-

নির্ভরাজকের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মসমূহ নিচে উল্লেখ করা হলোঃ-

১। নির্ভরাজক স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে অধীন চলকের মানের পরিবর্তনের হার নির্দেশ করে।

২। নির্ভরাজক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

৩। দুটি চলকের নির্ভরাজকদ্বয়ের জ্যামিতিক গড় তাদের সংশ্লেষাজকের সমান, $r_{xy} = \sqrt{b_{yx}b_{xy}}$.

৪। দুটি চলকের নির্ভরাজকদ্বয়ের গাণিতিক গড় তাদের সংশ্লেষাজক অপেক্ষা বড়। $\frac{b_{yx}+b_{xy}}{2} > r_{xy}$ ।

৫। নির্ভরাজকদ্বয় অপ্রতিসম। অর্থাৎ, $b_{yx} \neq b_{xy}$ ।

৬। নির্ভরাজকের মান $-\infty$ হতে ∞ এর মধ্যে যে কোনো মান হতে পারে।

৭। নির্ভরাজকদ্বয়ের একটির মান -1 অপেক্ষা বড় হলে অপরটি 1 অপেক্ষা ছোট। অর্থাৎ, $b_{yx} > 1$ হলে $b_{xy} < 1$ হবে।

৮। নির্ভরাজক বিশুদ্ধ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ, নির্ভরাজক চলকদ্বয়ের এককের উপর নির্ভরশীল।

প্রশ্নঃ- পরিসংখ্যানে নির্ভরনের ব্যবহার/গুরুত্ব/প্রয়োজনীয়তা লিখ।

উত্তরঃ- পরিসংখ্যানে নির্ভরনের ব্যবহার/গুরুত্ব/প্রয়োজনীয়তা নিচে উল্লেখ করা হলোঃ

১। নির্ভরনের সাহায্যে দুটি চলকের মধ্যে একটি চলকের সাপেক্ষে অন্য চলকটির মানের গড় পরিবর্তন পরিমাপ করা হয়।

২। দুই বা ততোধিক চলকের সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব নির্ভরণ বিশ্লেষণের মাধ্যমে নির্ণয় করা হয়।

৩। কালিন সারি তথ্য বিশ্লেষণের মাধ্যমে পূর্বাভাস প্রদানে নির্ভরণ বিশ্লেষণ ব্যবহার করা হয়।

৪। স্বাধীন চলকের কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য অধীন চলকের মান নির্ণয় করতে নির্ভরণ পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।

৫। দুটি চলকের নির্ভরাজকদ্বয়ের মাধ্যমে তাদের সংশ্লেষাজক নির্ণয় করা যায়।

৬। ক্রয় ক্ষমতার সাথে আয়ের সম্পর্ক, বিজ্ঞাপনের খরচের সাথে বিক্রয়ের সম্পর্ক, পুঁজি বিনিয়োগের সাথে মুনাফা অর্জনের সম্পর্ক, জীবনযাত্রার

মানের সাথে উৎকৃষ্ট দ্রব্য ক্রয়ের সম্পর্ক ইত্যাদি পর্যালোচনার ক্ষেত্রে নির্ভরণ ব্যবহৃত হয়।

প্রশ্নঃ- সংশ্লেষ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্য লিখ।

উত্তরঃ- সংশ্লেষ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্য নিম্নে দেওয়া হলোঃ

সংশ্লেষ	নির্ভরণ
১। সংশ্লেষের মাধ্যমে দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা ও গতি পরিমাপ করা যায়।	১। নির্ভরণের মাধ্যমে এক বা একাধিক স্বাধীন চলকের জানা মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের গড় মান নিরূপন করা যায়।
২। সংশ্লেষে স্বাধীন ও অধীন চলকের ধারণা নেই।	২। নির্ভরণে স্বাধীন ও অধীন চলকের ধারণা আছে।
৩। সংশ্লেষাজক মূল ও মাপনী হতে স্বাধীন।	৩। নির্ভরাজক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।
৪। সংশ্লেষাজকের মান চলক নিরপেক্ষ। অর্থাৎ, $r_{xy} = r_{yx}$ ।	৪। নির্ভরাজকদ্বয় অপতিসম। অর্থাৎ, $b_{yx} \neq b_{xy}$ ।
৫। সংশ্লেষাজকের মান -১ হতে ১ এর মধ্যে থাকে। অর্থাৎ, $-1 \leq r \leq 1$ ।	৫। নির্ভরাজকের মান $-\infty$ হতে ∞ এর মধ্যে যে কোনো মান হতে পারে।
৬। সংশ্লেষাজক এককমুক্ত সংখ্যা।	৬। নির্ভরাজক এককমুক্ত সংখ্যা নয়।
৭। সংশ্লেষে চলকসমূহের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা হয় না।	৭। নির্ভরণে চলকের মধ্যে সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা হয়।

প্রশ্ন:- সংশ্লেষাঙ্ক কী মূল ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল? ব্যাখ্যা কর।

উত্তরঃ- সংশ্লেষাঙ্ক মূল ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল নয়।

মনে করি, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর n সংখ্যক জোড়া মানসমূহ যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ যাদের গাণিতিক গড় যথাক্রমে \bar{x} ও \bar{y} । চলকদ্বয়ের সংশ্লেষাঙ্ক r_{xy} হলে,

$$\therefore r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$$

ধরি, u একটি নতুন চলক যেন $u_i = \frac{x_i - a}{c}$ [এখানে, a মূল ও c মাপনী ($c > 0$)]

$$\text{বা, } x_i - a = cu_i$$

$$\text{বা, } x_i = a + cu_i$$

$$\text{বা, } \bar{x} = a + c\bar{u}$$

এবং অন্য একটি চলক যেন $v_i = \frac{y_i - b}{d}$ [এখানে, b মূল ও d মাপনী ($d > 0$)]

$$\text{বা, } y_i - b = dv_i$$

$$\text{বা, } y_i = b + dv_i$$

$$\text{বা, } \bar{y} = b + d\bar{v}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } r_{xy} &= \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}} = \frac{\sum(a + cu_i - a - c\bar{u})(b + dvi - b - d\bar{v})}{\sqrt{\sum(a + cu_i - a - c\bar{u})^2 \sum(b + dvi - b - d\bar{v})^2}} = \frac{\sum(cui - c\bar{u})(dvi - d\bar{v})}{\sqrt{\sum(cui - c\bar{u})^2 \sum(dvi - d\bar{v})^2}} \\ &= \frac{cd \sum(ui - \bar{u})(vi - \bar{v})}{cd \sqrt{\sum(ui - \bar{u})^2 \sum(vi - \bar{v})^2}} = \frac{\sum(ui - \bar{u})(vi - \bar{v})}{\sqrt{\sum(ui - \bar{u})^2 \sum(vi - \bar{v})^2}} = r_{uv} \therefore r_{xy} = r_{uv} \end{aligned}$$

উপরের সম্পর্ক হতে দেখা যায় যে, r_{xy} ও r_{uv} পরস্পর মূল a, b এবং মাপনী c, d হতে মুক্ত। সুতরাং, সংশ্লেষাঙ্ক মূল ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ, সংশ্লেষাঙ্ক মূল ও মাপনী হতে স্বাধীন।

প্রশ্ন:- সংশ্লেষাঙ্কের মান কী -১ হতে +১ এর মধ্যে থাকে? ব্যাখ্যা কর।

উত্তরঃ- সংশ্লেষাঙ্কের মান -১ হতে +১ এর মধ্যে থাকে।

মনে করি, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর n সংখ্যক জোড়া মানসমূহ যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ যাদের গাণিতিক গড় যথাক্রমে \bar{x} ও \bar{y} ।

$$\therefore x \text{ ও } y \text{ এর সংশ্লেষাঙ্ক, } r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$$

$$\text{ধরি, } u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{(x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{এবং } v_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\sqrt{(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\text{বা, } u_i^2 = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{বা, } v_i^2 = \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

$$\therefore \sum u_i^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = 1 \quad \therefore \sum v_i^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 1$$

$$\text{আবার, } u_i \cdot v_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{(x_i - \bar{x})^2}} \cdot \frac{y_i - \bar{y}}{\sqrt{(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\therefore \sum u_i v_i = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}} = r \quad [\text{উভয় পক্ষকে } \sum \text{ দ্বারা গুণ করে পাই}]$$

আমরা জানি, বর্গসংখ্যা কখনও ঋনাত্মক হতে পারে না। সুতরাং, $\sum(u_i \pm \bar{u})^2 \geq 0$

$$\text{বা, } \sum(u_i^2 \pm 2u_i v_i + v_i^2) \geq 0$$

$$\text{বা, } \sum u_i^2 \pm 2\sum u_i v_i + \sum v_i^2 \geq 0$$

$$\text{বা, } 1 \pm 2r + 1 \geq 0$$

$$\text{বা, } 2 \pm 2r \geq 0$$

$$\text{বা, } 1 \pm r \geq 0$$

যোগবোধক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$$s+r \geq 0$$

$$r \geq -1$$

করলে \geq থাকলে \leq হয়]

$$\therefore -1 \leq r \dots \dots \dots (i)$$

ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $-1 \leq r \leq 1$

সুতরাং, সংশ্লেষাজ্কে মান -1 হতে $+1$ এর মধ্যে থাকে।

প্রশ্ন- নির্ভরাজ্কে কি মূল ও মাপনী উভয় হতে স্বাধীন? ব্যাখ্যা কর।

উত্তরঃ- নির্ভরাজ্কে মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

মনে করি, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর n সংখ্যক জোড়া মানসমূহ যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots \dots \dots, (x_n, y_n)$ যাদের গাণিতিক গড় যথাক্রমে \bar{x} ও \bar{y} ।

সুতরাং, x এর উপর y এর নির্ভরাজ্কে, $b_{yx} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$ ।

ধরি, u একটি নতুন চলক যেন $u_i = \frac{x_i - a}{c}$ [এখানে, a মূল ও c মাপনী ($c > 0$)]

$$\text{বা, } x_i - a = cu_i$$

$$\text{বা, } x_i = a + cu_i$$

$$\text{বা, } \bar{x} = a + c\bar{u}$$

এবং অন্য একটি চলক যেন $v_i = \frac{y_i - b}{d}$ [এখানে, b মূল ও d মাপনী ($d > 0$)]

$$\text{বা, } y_i - b = dv_i$$

বিয়োগবোধক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$$s-r \geq 0$$

$$-r \geq -1 \text{ [অসমতাকে } - \text{ দ্বারা গুণ}$$

$$\therefore -r \leq 1 \dots \dots \dots (ii)$$

$$\text{বা, } y_i = b + dv_i$$

$$\text{বা, } \bar{y} = b + d\bar{v}$$

সুতরাং, x এর উপর y এর নির্ভরাজক, $b_{yx} =$

$$\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{\sum(a+cu_i-a-c\bar{u})(b+dv_i-b-d\bar{v})}{\sum(a+cu_i-a-c\bar{u})^2} = \frac{\sum(cu_i-c\bar{u})(dv_i-d\bar{v})}{\sum(cu_i-c\bar{u})^2}$$
$$= \frac{cd \sum(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{c^2 \sum(u_i-\bar{u})^2}$$

$$= \frac{d \sum(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{c \sum(u_i-\bar{u})^2}$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{d}{c} \cdot b_{vu}$$

অনুরূপভাবে, y এর উপর x এর নির্ভরাজকের ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে, $b_{xy} = \frac{c}{d} \cdot b_{uv}$

উপরের সম্পর্কদ্বয় হতে দেখা যায় যে, নির্ভরাজকদ্বয় পরস্পর মূল a ও b দ্বারা নয় মাপনী c ও d দ্বারা সম্পর্কিত। সুতরাং, নির্ভরাজক মূল হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

বাড়ির কাজঃ

নিম্নে দশ জোড়া দম্পতির বয়সের তথ্য দেওয়া হলোঃ

স্বামীর বয়স	২৫	২৭	৩২	৩৩	৩০	২৮	২৫	২৬	২৭	২৬
স্ত্রীর বয়স	১৮	২১	২২	২৫	২৭	২৬	২৪	২০	২১	২২

(ক) নির্ভরাজ্ঞ কী?

(খ) নির্ভরাজ্ঞের মান কি চলক নিরপেক্ষ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) স্ত্রীর বয়সের উপর স্বামীর বয়সের নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকে উল্লিখিত তথ্যের বিক্ষেপ চিত্র অংকনপূর্বক স্বামী ও স্ত্রীর বয়সের প্রকৃতি বর্ণনা কর।



বাড়িতে থাকি সুস্থ থাকি।

সবাইকে ধন্যবাদ